Komplexe Zahlen

Kartesische Form	Polarform	Exponentialform
$z = a + ib$	$z = r[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]$	$z = r \cdot e^{i\varphi}$

Umrechnungen:

Kartesisch in Polarform

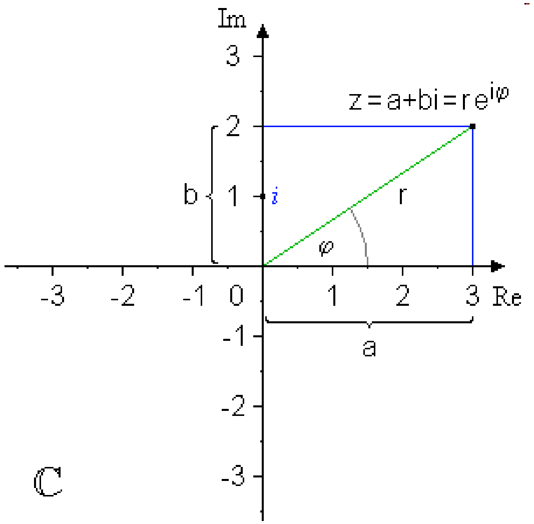
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arccos\left(\frac{a}{r}\right), b \geq 0$$

$$\varphi = \arg(z) = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right), b < 0$$

Polar- in kartesische Form

$$a = \mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos(\varphi)$$
$$b = \mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin(\varphi)$$



Eulersche Identität

Gleichheit von Polar- und Exponentialform

$$r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right)$$

Benötigt werden folgende Reihenentwicklungen

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1!} - \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^3 x^3}{3!} \ldots = \sum_{k>0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{k!}$$

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1!} - \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^3x^3}{3!} \ldots = \sum_{k>0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{k!}$$

Reihenentwicklung einer Exponentialfunktion mit Koeffizienten im Exponenten

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \frac{i^8x^8}{8!} \ldots = \sum_{k>0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$$

Einsetzen der imaginären Einheit i

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(-1)x^2}{2!} + \frac{(-1)ix^3}{3!} + \frac{(+1)x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{(-1)x^6}{6!} + \frac{(-1)ix^7}{7!} + \frac{(+1)x^8}{8!} \ldots = \sum_{k>0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}$$

Ausmultiplizieren von i

$$\boxed{e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \ldots = \sum_{k>0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!}}$$

Reihenentwicklung der Exponentialform einer komplexen Zahl

$$\mathbf{i \cdot sin(x)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad + \quad \mathbf{cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

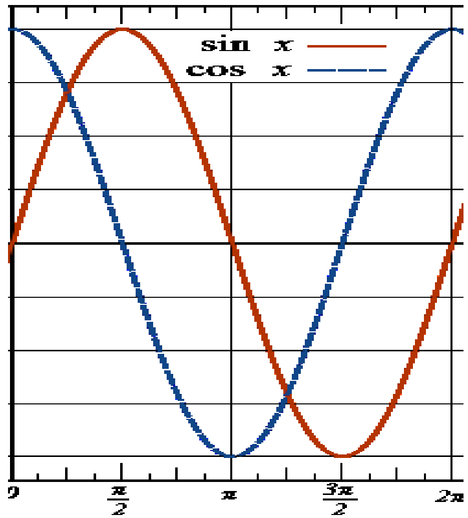
Alle ungeraden Elemente gehören zur Reihenentwicklung des Sinus, alle geraden Elemente zu der des Kosinus also ist die Entwicklung der komplexen Exponentialfunktion die Summe aus den Entwicklungen der Sinus- und Kosinusfunktion. Daraus folgt:

$$r \cdot e^{ix} = r \cdot [\cos(x) + i\sin(x)]$$

Aus der Eulerschen Identität ergibt sich folgende Periodizität in der Darstellung komplexer Zahlen

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot [\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$$

$$z = r \cdot e^{i(2\pi+\varphi)} = r \cdot [\cos(2\pi+\varphi) + i\sin(2\pi+\varphi)]$$



Wieviele und welche Lösungen gibt es für die 4. Wurzel aus eins?

$$\sqrt[4]{1} = 1^{1/4}$$

Darstellung des Problems in komplexer Schreibweise:

$$1^{1/4} = \left[e^{i\cdot 2\pi\cdot n}\right]^{1/4}$$

wegen

$$\cos(2\pi\cdot n) + i\sin(2\pi\cdot n) = 1 + 0 = e^{i\cdot 2\pi\cdot n}$$

n=0: $e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot n}{4}} = e^0 = 1$

n=1: $e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot n}{4}} = e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot 1}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$

n=2: $e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot n}{4}} = e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot 2}{4}} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0 = -1$

n=3: $e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot n}{4}} = e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot 3}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$

n=4: $e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot n}{4}} = e^{\frac{i\cdot 2\pi\cdot 4}{4}} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 + 0 = 1$

Dasselbe Ergebnis wie für n=0. Ab hier wiederholen sich die Ergebnisse. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat eine Wurzel genau so viele Lösungen wie ihr ganzzahliger Wurzelexponent angibt.

Lösungen: 1, i, -1, -i

Lösungstabelle

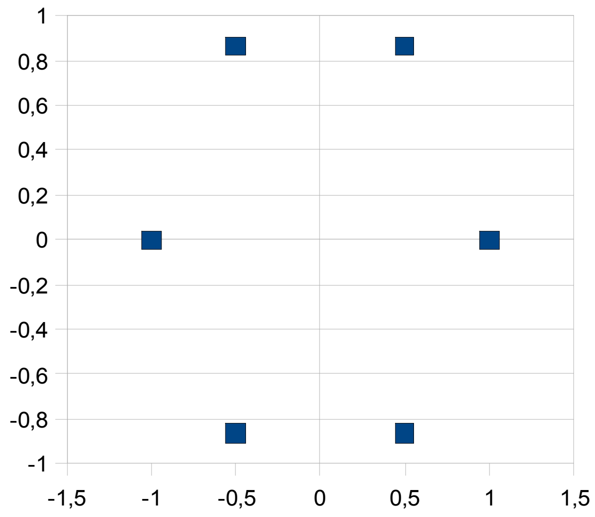
Vielfache von 2π

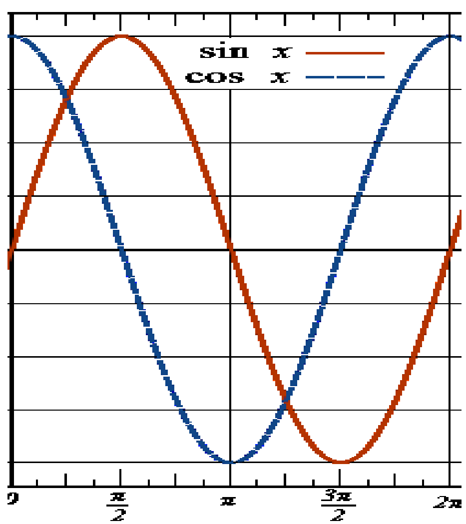
	0	1/4	2/4	3/4
isin(x)	0	1	0	-1
cos(x)	1	0	-1	0
Ergebnisse:	**1**	**i**	**-1**	**-i**

Beispiel: 6. Wurzel aus 1

Vielfache von 2π

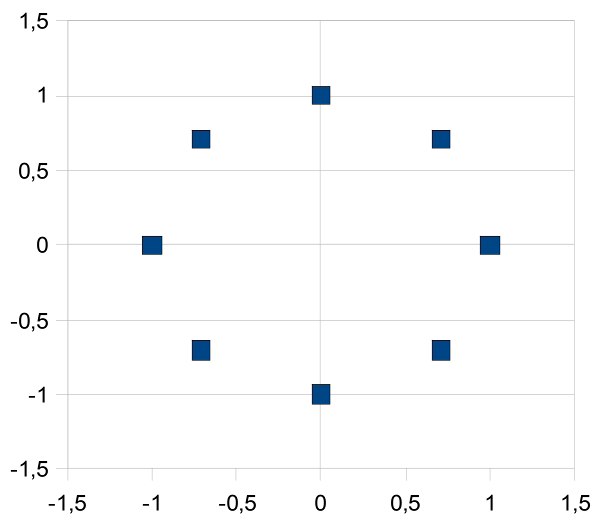
	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6
isin(x)	0,00	0,87	0,87	0,00	-0,87	-0,87
cos(x)	1,00	0,50	-0,50	-1,00	-0,50	0,50
Ergebnisse:	**1**	**0,5+0,87i**	**-0,5+0,87i**	**-1**	**-0,5-0,87i**	**0,5-0,87i**

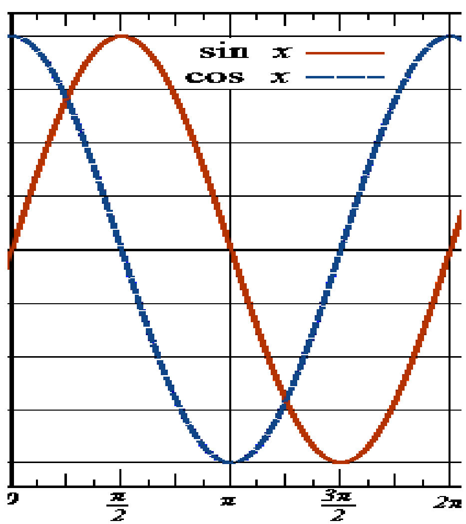




Beispiel: 8. Wurzel aus 1

	Vielfache von 2π							
	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
isin(x)	0	0,71	1	0,71	0	-0,71	-1	-0,71
cos(x)	1	0,71	0	-0,71	-1	-0,71	0	0,71
Ergebnisse	**1**	**0,71+0,71i**	**i**	**-0,71+0,71i**	**-1**	**-0,71-0,71i**	**-i**	**0,71-0,71i**





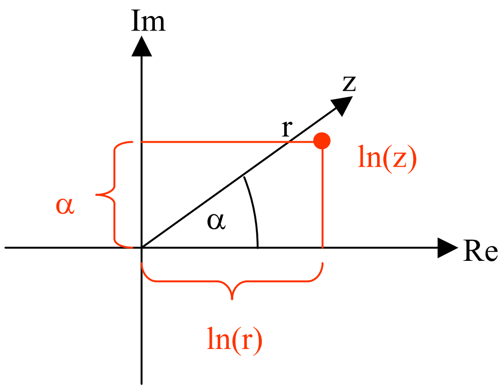
Logarithmus einer komplexen Zahl

$$\ln(z) = \ln(r \cdot e^{i\alpha})$$

$$\ln(z) = \ln(r) + i\alpha$$ Hauptwert des Logarithmus

Aufgrund der Periodizität ergeben sich folgende Nebenwerte:

$$\ln(z) = \ln(r) + i(\alpha + 2\pi \cdot n)$$



Kosinus einer komplexen Zahl

$$\cos(z) = \cos(x + iy)$$

Additionstheorem $$\cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)$$

cos(iy) ?
sin(iy) ?

Hyperbolicus-Funktionen

cos(iy) ?
sin(iy) ?

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

$$(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x)$$

$$\cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) = 2\cos(x)$$

$$2\cos(x) = e^{ix} + e^{-ix}$$

$$2\cos(ix) = e^{iix} + e^{-iix}$$

$$2\cos(ix) = e^{-x} + e^{x}$$

$$\cos(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\boxed{\cos(ix) = \cosh(x)}$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

$$(e^{ix} - e^{-ix}) = \cos(x) + i\sin(x) - \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\cos(x) + i\sin(x) - \cos(x) + i\sin(x) = 2i\sin(x)$$

$$2i\sin(x) = e^{ix} - e^{-ix}$$

$$2i\sin(ix) = e^{iix} - e^{-iix}$$

$$2i\sin(ix) = e^{-x} - e^{x}$$

$$-i\sin(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\boxed{-i\sin(ix) = \sinh(x)}$$

Kosinus einer komplexen Zahl

2. Versuch

$\cos(iy)=\cosh(y)!$
$\sin(iy)=-i\sinh(y)!$

$$\cos(z) = \cos(x+iy)$$

Additionstheorem $\cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy)$

$$\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - \sin(x)\left[-i\sinh(y)\right]$$

$$\boxed{\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) + i\sin(x)\sinh(y)}$$

Sinus einer komplexen Zahl

$$\sin(z) = \sin(x+iy)$$

Additionstheorem $\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy)$

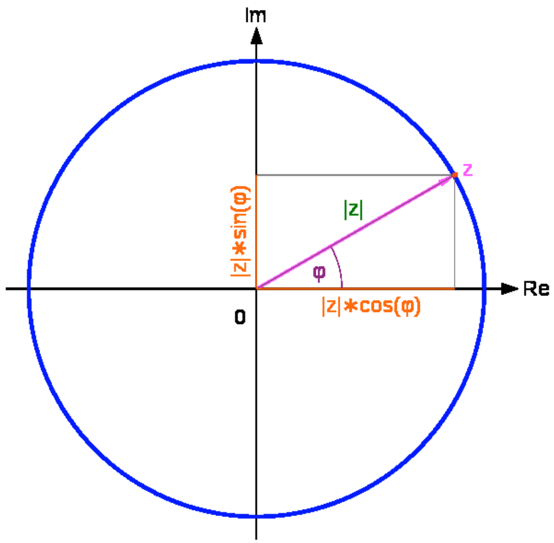
$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\left[-i\sinh(y)\right]$$

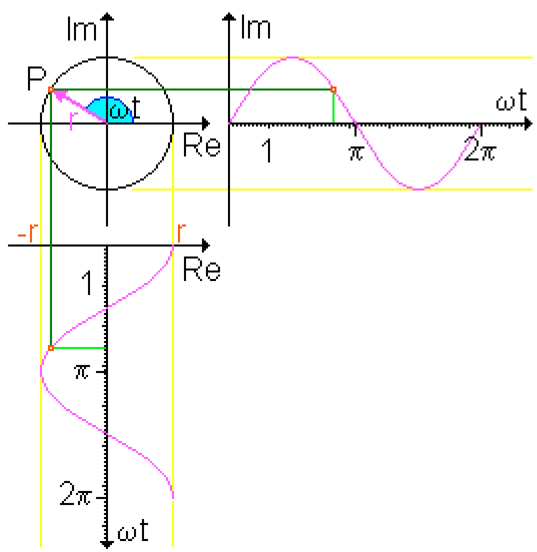
$$\boxed{\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y)}$$

Anwendungen

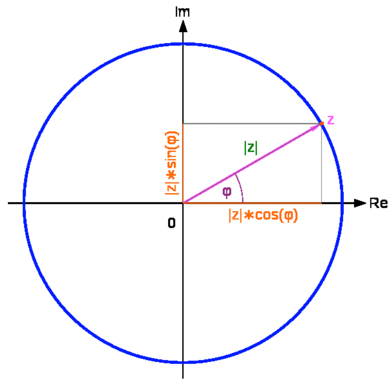
Zeigerdiagramm – Veranschaulichung von Schwingungen

Die Projektion eines Zeigers der mit der Frequenz ωt auf der Gauss-Ebene rotiert auf die imaginäre Achse ist die reelle Sinusschwingung





Komplexe Darstellung einer harm. Schwingung



$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ Gleichung einer harm. Schwingung (reell)

$$y(t) = A[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$y(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$$

Nicht abhängig von t also const.

$$\boxed{y(t) = \underline{A} \cdot e^{i\omega t}}$$

Allgemeine komplexe Darstellung einer zeitabhängigen Schwingung

Wechselstromwiderstand

$$U(t) = u \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \qquad I(t) = i \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$$R = \frac{u \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{i \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \left(\frac{u}{i}\right) e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$R = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{u}{i}\right)\cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{\text{Wirkwiderstand}} + \underbrace{i\left(\frac{u}{i}\right)\sin(\varphi_u - \varphi_i)}_{\text{Scheinwiderstand}}}_{\text{Impedanz}}$$

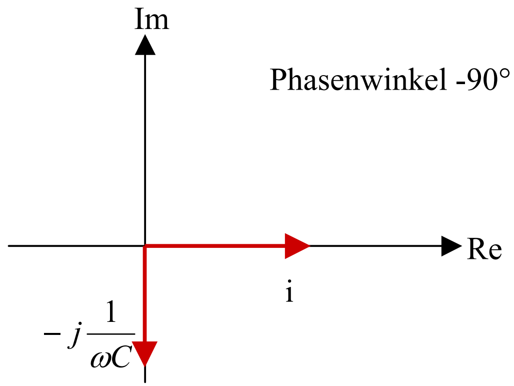
Kondensator im Wechselstromkreis

$$i = C\frac{d}{dt}u$$

$$i \cdot e^{j\omega t} = C\frac{d}{dt}\left(u \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$i \cdot e^{j\omega t} = C \cdot j\omega \cdot u \cdot e^{j\omega t}$$

$$R = \frac{u}{i} = \frac{u \cdot e^{j\omega t}}{C \cdot j\omega \cdot u \cdot e^{j\omega t}} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$



Am Kondensat**or** eilt der St**rom** v**or**

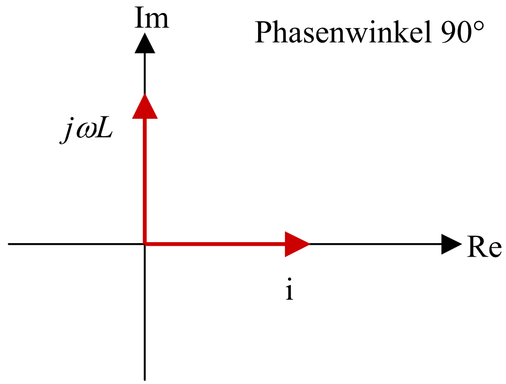
Spule im Wechselstromkreis

$$u = L\frac{d}{dt}i$$

$$u \cdot e^{j\omega t} = L\frac{d}{dt}\left(i \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$u \cdot e^{j\omega t} = L \cdot j\omega \cdot i \cdot e^{j\omega t}$$

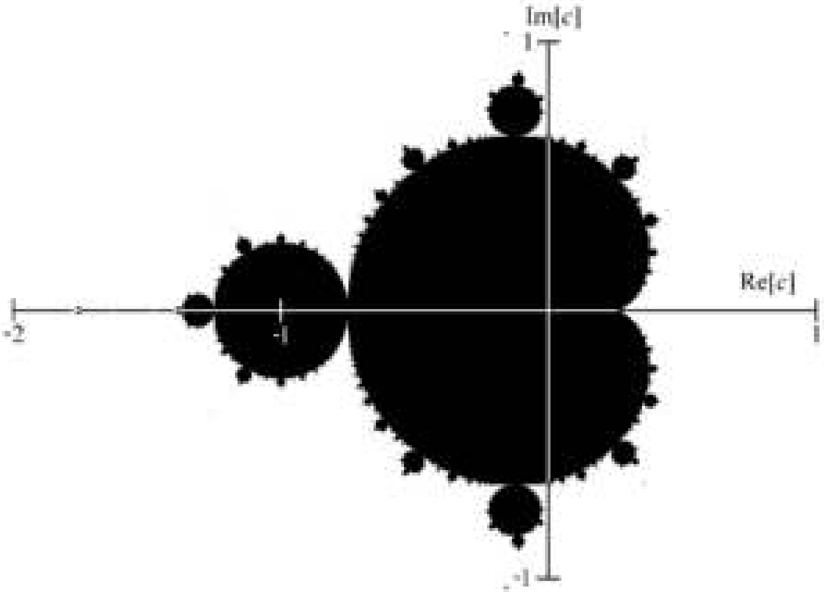
$$R = \frac{u}{i} = \frac{L \cdot j\omega \cdot u \cdot e^{j\omega t}}{u \cdot e^{j\omega t}} = j\omega L$$

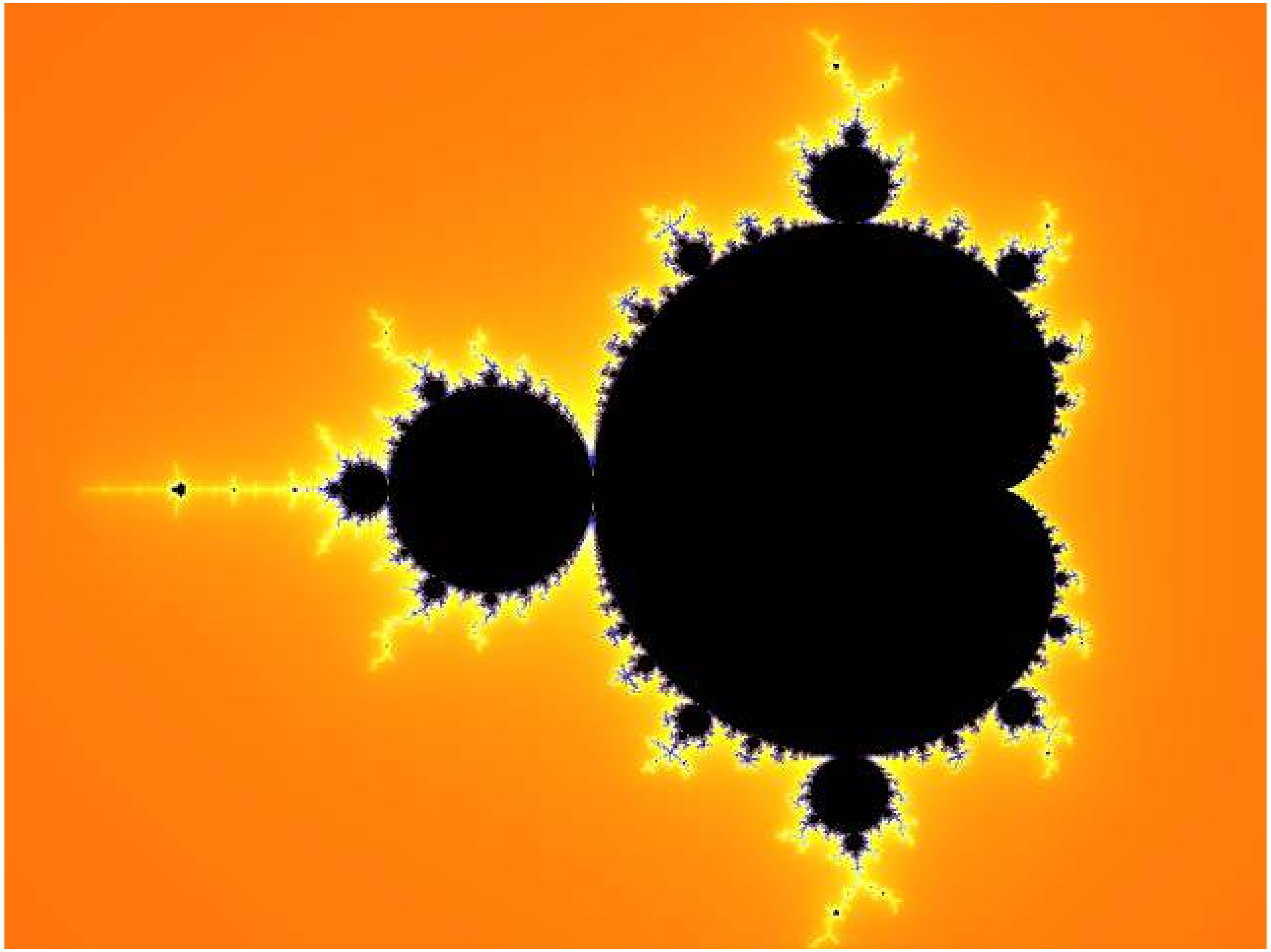


Mandelbrotmengen

(Benoît Mandelbrot)

$$z_{n+1} = z_n^{\;2} + c$$





http://www.fractalizer.de/